Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física) Septiembre de 2014

Alumnos con evaluación continua: Deben procurar contestar tanto a la cuestión como a los problemas.
Alumnos con solamente examen presencial: Debe superar el 40 % de la nota máxima de cada parte por separado.
Cuestiones: conteste breve y razonadamente, ajustándose a la pregunta y explicando lo que hace.
Problemas: debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando con claridad los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** la notación y las fórmulas que utilice.
No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
Solamente se permite el uso de un libro de Tablas y Fórmulas matemáticas, sin añadido alguno.

CUESTIONES (puntuación: hasta 1,5 puntos por cuestión)

C1.- (para todos los estudiantes)
La función de onda radial para un átomo de hidrógeno en el estado $n = 2$, $\ell = 1$ es

$$R_{21}(r) = \left(1/\sqrt{24a_0^5}\right) r \exp(-r/2a_0).$$

Calcule el valor esperado $\langle r \rangle_{21}$ y compárelo con el valor $r_{\text{máx}}$ para el que es máxima la probabilidad de encontrar el electrón.

C2.- (solamente deben responderla los estudiantes que <u>no</u> hayan realizado la evaluación continua)
Sea un sistema compuesto de dos partículas de espín 1/2. La primera partícula se encuentra en el estado $|\uparrow\rangle$, autoestado de S_z con valor propio $+1/2$; y la segunda partícula se encuentra en el estado $|\rightarrow\rangle$, autoestado de S_x con valor propio $+1/2$.
Calcule la probabilidad de encontrar el valor 0 en una medida del espín **total** del sistema.

PROBLEMAS (puntuación: hasta 3,5 puntos por problema)

P1.- (para todos los estudiantes)
Sea un rotor tridimensional, cuyo hamiltoniano es $\widehat{H} = \dfrac{\widehat{L}_x^2}{2I_x} + \dfrac{\widehat{L}_y^2}{2I_y} + \dfrac{\widehat{L}_z^2}{2I_z}$, con momentos principales de inercia $I_x = I_y = I \neq I_z$.

(a) Calcule sus niveles energéticos.

(b) Supongamos ahora que hay un pequeño cambio en los momentos principales, de modo que ya no hay dos iguales sino que $I_x - I_y = \Delta$ e $I_x + I_y = 2I$, con $(\Delta/2I) \ll 1$. Calcule las nuevas energías de los niveles $\ell = 0$ y $\ell = 1$ a primer orden en Δ.
Sugerencia: exprese el hamiltoniano de perturbación en función de los operadores L_+ y L_-

P2.- (para todos los estudiantes)
Un electrón está sometido a un campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. En el instante $t = 0$ el espín del electrón se encuentra a lo largo de la dirección positiva del eje X, es decir $s_x = 1/2$.

a) Calcule la evolución temporal de los valores medios de las componentes del espín.

Formulario para examen de *Física Cuántica II*

- **Datos que podrían ser útiles:**

$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s $\quad 1$ eV $= 1{,}6\times10^{-19}$ J $\quad m_p = 1{,}67\times10^{-27}$ kg $\quad e = 1{,}6\times10^{-19}$ C $\quad m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg

$R_\infty = 109737$ cm^{-1} $\quad k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J K^{-1} $\quad c = 3\times10^8$ m s^{-1} $\quad N_A = 60{,}2\times10^{22}$ $\quad a_o = \dfrac{4\pi\epsilon_o\hbar^2}{me^2} \simeq 0{,}52$ Å

$\lambda_C = h/(m_e c) = 0{,}024$ Å $\quad \mu_b = e\hbar/(2m_e) = 9{,}27\times10^{-24}$ J T^{-1} $\quad 1/(4\pi\epsilon_o) = 9\times10^9$ m^3 kg s^{-2} C^{-2}

- **Integrales que podrían ser útiles:**

$$\int_0^t e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t) \qquad \int_0^\infty x^m\exp(-ax^2)dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{2a^{n+1}} & \text{si } m = 2n+1 \ (m \text{ impar}) \\ \dfrac{1\cdot3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{a^{2n+1}}} & \text{si } m = 2n \ (m \text{ par}) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar}dr = n!/a^{n+1} \qquad \int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} \qquad \int x\cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$$

$$\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$$

- **Operadores**

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \qquad \widehat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\widehat{L}_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{cotg}\,\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad \widehat{L}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{cotg}\,\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad \widehat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\dots\right.$$

- **Matrices de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Perturbaciones independientes del tiempo**

$$E_n^{(1)} = \left\langle\psi_n^{(0)}\middle|\widehat{H}_p\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle \qquad \left|\psi_n^{(1)}\right\rangle = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{\left\langle\psi_k^{(0)}\middle|\widehat{H}_p\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}\left|\psi_k^{(0)}\right\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{\left|\left\langle\psi_k^{(0)}\middle|\widehat{H}_p\middle|\psi_n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

- **Perturbaciones dependientes del tiempo**

$$\lambda A_{ik}^{(1)}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^t e^{\mathrm{i}\Omega_{ki}(\tau-t_0)}\langle\psi_k^{(0)}|\lambda\hat{W}(t)|\psi_i^{(0)}\rangle d\tau \qquad \text{con} \quad \Omega_{ki} = \left(E_k^{(0)} - E_i^{(0)}\right)/\hbar$$

$$\lambda^2A_{ik}^{(2)}(t) = -\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2\sum_n\int_{t_0}^t d\tau\int_{t_0}^\tau d\tau' e^{\mathrm{i}\Omega_{kn}(\tau-t_0)}e^{\mathrm{i}\Omega_{ni}(\tau'-t_0)}\langle\psi_k^{(0)}|\lambda\hat{W}(\tau)|\psi_n^{(0)}\rangle\langle\psi_n^{(0)}|\lambda\hat{W}(\tau')|\psi_i^{(0)}\rangle$$

$$\dots|^2\,\sin^2\left(\frac{\omega - |\Omega_{mn}|}{\dots}t\right)$$

$$R_{nl}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2a_0^{3/2}}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) \qquad L_{q-p}^p(u) = (-1)^p\frac{d^p}{du^p}L_q(u)$$